

令和5年度実施

東北大学大学院情報科学研究科

博士課程前期・下期入学試験問題(2024年2月3日)

専門試験科目群第7・社会科学群

専門科目 問題冊子

注意(Notices)

1. 設問から2問題を選択し、解答用紙に解答すること。

Choose 2 from the 4 questions and write your answer on the answer sheet.

2. 1つの問題につき1枚の解答用紙を使用すること(解答が複数枚にわたってもかまわないが、その場合には問題毎に用紙をかえること)。その際、各解答用紙の上部にある問題番号欄に、対応する問題番号を記入すること。

Use one answer sheet for each question (Do not use one sheet for different problems although you may use several sheets for one problem.). Write the question number in the upper right box of the answer sheet(s).

令和5年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2024年2月3日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-1

所得 $I > 0$ を与えられ、効用 $U = \alpha x - \beta x^2/2 + \alpha y - \beta y^2/2 + \gamma xy + z$ を最大化するように三種類の財 x, y, z を消費する、1単位の消費者が存在する。ただし、 $\alpha, \beta > 0$ と $\gamma \in (-\beta, \beta)$ はいずれも外生変数である。このとき、財 z は常に価格1で入手可能だが、財 x, y はそれぞれ異なる独占企業によって供給されているものとする。 x, y の価格をそれぞれ $p_x, p_y > 0$ とし、また二種類の財の単位生産費用はいずれも $c > 0$ であるとする。このとき、以下の問題に答えなさい。ただし、 $x, y, z > 0$ となる範囲でのみ考えること。(1) 財 x, y に対する消費者の需要関数 $x(p_x, p_y)$, $y(p_y, p_x)$ をそれぞれ求めなさい。(2) y 財の価格が p_y に固定されたもとで、 x 財を生産する独占企業が、利潤を最大化するために設定する価格 p_x を求めなさい。(3) 二企業がそれぞれ同時に価格を決定する時、市場均衡価格を求めなさい。(4) 二企業が統合され、合計利潤を最大化するように x, y を同時決定する単一企業が生まれた。この企業が設定する x 財の価格を求めなさい。また、統合が社会的総余剰に与える影響について考察しなさい。

[English] Consider one unit of consumers who are endowed with income $I > 0$ and consume three kinds of goods x, y , and z to maximize utility $U = \alpha x - \beta x^2/2 + \alpha y - \beta y^2/2 + \gamma xy + z$, where $\alpha, \beta > 0$ and $\gamma \in (-\beta, \beta)$ are all both exogenous variables. Assume that good z is always available at a price of 1, but the goods x and y are supplied by different monopolistic firms. The prices of x, y are denoted by $p_x, p_y > 0$, respectively, and the marginal production cost of the two goods is $c > 0$. Answer the following questions assuming $x, y, z > 0$. (1) Find the consumers' demand functions $x(p_x, p_y)$ and $y(p_y, p_x)$ for goods x, y , respectively. (2) Assume that the price of good y is fixed at p_y , find the price p_x to maximize the firm profit of x . (3) When the two firms determine their prices simultaneously, find the market equilibrium prices. (4) Suppose that the two firms are merged into a single firm which produces both x and y to maximize the total profit. Find the price of x goods set by the company. Also, discuss the impact of integration on the total social surplus.

令和5年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題(2024年2月3日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-2

ある線形都市の住民はすべて都心に通勤し、1000万円の年収をもち、合成財 z と 100 m^2 の敷地の住宅を消費する。現在の住宅地は都心から 50 km の地点まで広がっている。往復通勤費用は 1 km あたり年間 2 万円かかる。住宅地の外側の境界での地代は農業地代として、 1 m^2 あたり年間 1 万円である。(1) 都心からの距離が $x \text{ km}$ のとき、 1 m^2 の地代を $R(x)$ 万円、合成財の価格は地点によらず 1 万円とし、 x に居住する消費者の予算制約を示せ。(2) $R(0)$ を求めよ。(3) この都市は小開放都市である。交通システムの発展に伴い通勤費用が半分になるとき、住宅地の新しい境界を求めよ。ただし、農業地代は一定とする。

[English]

Consider a linear city where all residents commute to the city center (CBD), earning an annual income of 1000 units of currency. They consume a composite good denoted as z and reside in houses with a land area of 100 m^2 . The current urban fringe is 50 km from the CBD. The round-trip commuting cost is 2 per km annually. The land rent outside the urban fringe is considered as agricultural land rent, and it amounts to 1 per m^2 annually. (1) Let $R(x)$ be the land rent per m^2 at a distance x from the CBD. The price of the composite good is 1 everywhere. Provide the budget constraint for a resident living at distance x . (2) Calculate $R(0)$. (3) Assume that this is a small open city, and commuting costs are reduced to half due to transportation improvements. The agricultural land rent is fixed. Determine the new location of the urban fringe.

令和5年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2024年2月3日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-3 (1) 次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_D \frac{xy}{(x+y)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x+y \leq 2\}.$$

(2) 制約条件 $x^2 + y^2 \leq 17$ の下で、関数 $f(x, y) = 4x - y$ の極大値・極小値を求めよ。

[English] (1) Calculate the following multiple integral

$$\iint_D \frac{xy}{(x+y)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x+y \leq 2\}.$$

(2) Find the maximum and minimum values of $f(x, y) = 4x - y$ subject to the constraint $x^2 + y^2 \leq 17$.

問題 E-4

$\{(X_i, Y_i)\} = \{(20, 18), (40, 29), (60, 48), (80, 59), (100, 86)\}$ を、5つの家計の所得 X と消費 Y に関するデータとする。(1) X と Y の標本分散 s_X^2, s_Y^2 、および X と Y の標本共分散 s_{XY} を計算しなさい。(2) X_i と Y_i の関係として $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$ を仮定する。ここで、 ε_i は平均がゼロで、独立同分布に従う誤差項である。また、 \hat{a} と \hat{b} をそれぞれ a と b の推定値とする。残差二乗和 $e^2 = \sum_{i=1}^5 (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2$ の \hat{a} と \hat{b} に対する一階条件を求めなさい。(3) a と b に対する最小二乗推定量 \hat{a}_{OLS} と \hat{b}_{OLS} を計算しなさい。(4) 別の調査では $b = 0.7$ という推定結果が報告されていたが、今回の推定値 \hat{b}_{OLS} はこの数値と大きく異なるかどうかを、 t 検定を用いて確認したい。 t 検定を行うために追加する必要がある、誤差項に対する仮定を述べなさい。(5) 検定の方法について、概略を述べなさい。

[English]

Let $\{(X_i, Y_i)\} = \{(20, 18), (40, 29), (60, 48), (80, 59), (100, 86)\}$ represent data regarding the income X and expenditure Y of five households. (1) Calculate the sample variance of X and Y , s_X^2 and s_Y^2 , and the sample covariance between X and Y , s_{XY} . (2) Assume the relationship between X_i and Y_i as $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$, where ε_i is a random variable, which follows an independent identical distribution with a mean of zero for all i . Let \hat{a} and \hat{b} be the estimators of a and b , respectively. Find the first order condition of the residual sum of squares $e^2 = \sum_{i=1}^5 (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2$ with respect to \hat{a} and \hat{b} . (3) Calculate the least squares estimators \hat{a}_{OLS} and \hat{b}_{OLS} for a and b . (4) Another survey reports the estimated value $b = 0.7$. In order to check whether \hat{b}_{OLS} of our data is significantly different from this value using a t test, impose an additional assumption about the random variable necessary to perform the t test. (5) Describe the outline of the test.