

令和4年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2022年8月31日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-1

財 x と y の市場価格はそれぞれ p_x と p_y である。消費者の選好は効用関数 $U(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{2y}$ で表す。消費者は収入 I を得ているとする。(i) 財 x と y の需要関数を求めなさい。(ii) 財 x に関して、需要の価格弾力性を求めなさい。(iii) 財 x と y の代替弾力性を求めなさい。

[English] The market prices of goods x and y are p_x, p_y , respectively. Consumer's preferences are represented by utility function $U(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{2y}$. Assume that the consumer has income I . (i) Find the demand functions of goods x and y . (ii) Calculate the price elasticity of demand for good x . (iii) Find the elasticity of substitution between goods x and y .

令和4年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2022年8月31日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-2 プレイヤー1, 2がそれぞれ2個の戦略(行動) A, Bを有するゲームの利得表が、下のように与えられている。各セルの1番目と2番目の数字は、プレイヤー1と2の利得をそれぞれ表す。また、問題(1)から(3)では各プレイヤーが同時に行動すると仮定する。

- (1) このゲームが典型的な「囚人のジレンマ」の性質を持つような、 x, y の数値例を示しなさい。また、「パレート最適」という言葉を使って、その理由を説明しなさい。
- (2) $x = 8, y = 2$ のもとで、このゲームの純粋戦略ナッシュ均衡を全て求めなさい。
- (3) このゲームが複数の純粋戦略ナッシュ均衡を持つような、 x, y の条件を示しなさい。
- (4) 最初にプレイヤー1が先導者として意思決定を行い、プレイヤー2は追従者として、相手の行動を観察してから意思決定を行う状況を考える。 $x = 8, y = 2$ のもとで、サブゲーム完全ナッシュ均衡を全て求めなさい。

[English]

The table below shows the payoffs of a game in which players 1 and 2 have two strategies (actions), A and B. The first and second numbers in each cell represent the payoffs of players 1 and 2 respectively for the corresponding strategy combination. Moreover, in (1)–(3), two players are assumed to make decisions simultaneously.

- (1) Give a specific example of x and y such that this game describes the typical “prisoner’s dilemma”. Also, explain the reason using the term “Pareto optimum”.
- (2) Find all pure strategy Nash equilibria of this game when $x = 8, y = 2$.
- (3) Show the conditions for x, y such that this game has multiple pure strategy Nash equilibria.
- (4) Assume that player 1 makes the decision first as a leader, and player 2 makes the decision after observing the decision of player 1 as a follower. Find all subgame perfect Nash equilibria if $x = 8$ and $y = 2$.

		Player 2	
		A	B
Player 1	A	x, x	$y, 7$
	B	6, 2	4, 3

令和4年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2022年8月31日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-3 (1) 関数 $f(x)$ は閉区間 $x \in [3, 10]$ において連続で、単調減少である。さらに、 $f(3) = 10$, $f(10) = 5$, $\int_3^{10} f(x)dx = 42.5$ とする。積分 $\int_5^{10} f^{-1}(x)dx$ を計算しなさい。

(2) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし、 $(J' + 2J^2)^{3n}$ を求めなさい。ただし、 J' は J の転置行列であり、 n は自然数である。

[English] (1) Suppose $f(x)$ is continuous and decreasing on the closed interval $x \in [3, 10]$. Furthermore, $f(3) = 10$, $f(10) = 5$, and $\int_3^{10} f(x)dx = 42.5$ hold. Calculate $\int_5^{10} f^{-1}(x)dx$.

(2) Let $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculate $(J' + 2J^2)^{3n}$, where J' is the transpose of J , and n is a natural number.

令和4年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2022年8月31日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-4 確率 p で成功し、 $1 - p$ で失敗する試行を繰り返し行う。このとき、 r 回成功するまでに失敗する回数 X が従う確率質量関数は

$$P(X = x; r, p) = \frac{(r + x - 1)!}{(r - 1)!x!} p^r (1 - p)^x$$

で与えられる。(1) $r = 1$ とする。(i) X の積率母関数 $E[e^{tX}]$ を計算しなさい。(ii) X の平均と分散を計算しなさい。(2) 一定の p の値のもとで5回成功するまでの失敗回数を10回記録したところ、32, 25, 38, 65, 68, 15, 40, 34, 83, 110であった。このとき、 p の最尤推定量を小数点以下3桁まで計算しなさい。

[English] Consider repeated trials, each of which succeeds with probability p and fails with probability $1 - p$. The probability mass function of the number of failures X before r successes is given as

$$P(X = x; r, p) = \frac{(r + x - 1)!}{(r - 1)!x!} p^r (1 - p)^x.$$

(1) Let $r = 1$. (i) Calculate the moment generating function of X , $E[e^{tX}]$. (ii) Calculate the mean and the variance of X . (2) The following are 10 records of the number of failures before 5 successes for a given p : 32, 25, 38, 65, 68, 15, 40, 34, 83, 110. Calculate the maximum likelihood estimator of p to three decimal places.