令和 3 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2022 年 1 月 29 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E-1

(1) 2 財 x, y からなる効用関数 (a)–(d) が与えられている。これらのうち、性質 (I)-(III) を全て満たすものを一つだけ選び、実際にそれらが満たされることを示しなさい。

$$\text{(a)}\ (x^{1/2}+y^{1/2})^2;\quad \text{(b)}\ \log x+\log y;\quad \text{(c)}\ x-x^2+y;\quad \text{(d)}\ (x^{-1/2}+y^{-1/2})^{-2}.$$

(I) 財 x が上級財.

(II) 財 x の需要の価格弾力性が、 財 x の価格とともに上昇する.

(III) 財 x に対する総支出が、 財 x の価格とともに増加する.

(2) ある財の需要関数と供給関数が、それぞれ $Q=20-P$、$Q=2P$ のように与えられている。ただし Q, P はそれぞれ数量と価格を表す。いま、この財の価格に 20% の従価税（価格に対する税）を課したときの、税収および税による死荷重をそれぞれ求めなさい。

[English]

(1) Consider utility functions (a)–(d) of two goods x and y. Choose only one of them satisfying all properties (I)-(III), and show that the properties are actually satisfied.

$$\text{(a)}\ (x^{1/2}+y^{1/2})^2;\quad \text{(b)}\ \log x+\log y;\quad \text{(c)}\ x-x^2+y;\quad \text{(d)}\ (x^{-1/2}+y^{-1/2})^{-2}.$$

(I) x is a superior good.

(II) The price elasticity of demand for good x increases with the price of x.

(III) The total expenditure on x increases with the price of x.

(2) Let the demand and supply functions of a good be $Q=20-P$ and $Q=2P$, where Q and P represent the quantity and the price, respectively. Assume that an ad valorem tax (i.e., based on the price) of 20% is levied on this good, give the tax revenue and the dead weight loss of this tax.

令和 3 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2022 年 1 月 29 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–2 ある独占企業が地域の都市部と農村部のどちらかに立地し、生産活動を行う。地元の 1 人の労働を投入して 1 単位の財を生産できるとする。都市部の賃金が 2 で、農村部の賃金が 1 である。都市部の需要関数は $7 - p$, 農村部の需要関数は $2(4 - p)$ となる。ただし、p はその地区の価格である。両地区の間の輸送は財 1 単位につき費用 τ がかかる。企業の利潤を最大化する立地を求めなさい。

[English] A monopoly firm chooses either the urban area or the rural area in a region to start production. Inputting 1 local worker can produce 1 unit of the good. The wage rates in the urban and rural areas are 2 and 1, respectively. The demand function in the urban area is $7 - p$ and the demand function in the rural area is $2(4 - p)$, where p is the price in the area. Additional cost τ is incurred in transportation between two areas. Find the optimal location for the firm to maximize the total profit.

令和3年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2022年1月29日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E–3

無限期生きる家計の効用最大化問題を以下のように与える。

$$\max_{c_0,c_1,\cdots} U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{\rho}$$

$$\text{s.t. } s_{t+1} = (1+r_t)(I_t - c_t + s_t)$$

$$I_{t+1} = (1+g)I_t.$$

ただし、$\beta \in (0,1)$、 $\rho \in (0,1)$、 および $g \geq 0$ はいずれも外生変数である。また、$I_0 = 1$ と $s_0 = 0$ を与える。

(1) $g = 0$ とする。一定の利子率 $r_0 = r_1 = r_2 = \cdots = r > 0$ が与えられたとき、この家計の消費が $c_1 = c_2 > 0$ となるような r の条件を求めなさい。

(2) $g > 0$ とする。上記したような同質な多数の家計からなる閉じた経済を考える。そこでは毎期 $I_t = c_t$ が成り立つように、均衡利子率 r_t が内生的に決まるものとする。均衡における r_1, r_2 を求めなさい。

[English] Consider the following utility maximization problem of a household that lives for infinite periods:

$$\max_{c_0,c_1,\cdots} U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{\rho}$$

$$\text{s.t. } s_{t+1} = (1+r_t)(I_t - c_t + s_t)$$

$$I_{t+1} = (1+g)I_t,$$

where $\beta \in (0,1)$, $\rho \in (0,1)$, and $g \geq 0$ are exogenous variables. Furthermore, $I_0 = 1$ and $s_0 = 0$.

(1) Assume $g = 0$ and a constant interest rate $r_0 = r_1 = r_2 = \cdots = r > 0$. Find the condition of r such that the household consumption becomes $c_1 = c_2 > 0$.

(2) Assume $g > 0$. Consider a closed economy consisting of a large number of the homogeneous households described above, in which the equilibrium interest rate r_t is endogenously determined so that $I_t = c_t$ holds in every period. Show r_1 and r_2 in equilibrium.

令和 3 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2022 年 1 月 29 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–4 (1) $x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$ とする ($r > 0,\ 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \phi < 2\pi$)。(i) 行列

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

において、$\det J$ を求めなさい。(ii) $z = 0$ とする。関数 $F(r(x,y),\phi(x,y))$ において、$\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ を、$r,\ \phi,\ \frac{\partial F}{\partial r}$ および $\frac{\partial F}{\partial \phi}$ を用いて表しなさい。(2) $y_j(x_1,\cdots,x_n) = \frac{x_j^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left[\sum_{k=1}^n x_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{1}{\rho}}}$、$X(\rho,x_1,\cdots,x_n) = \left[\sum_{k=1}^n x_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}}$ とおく。ただし、すべての $j = 1,\cdots,n$ に対して $x_j > 0$, $\rho \in (0,1)$ とする。(i) $y_j = \frac{\partial X}{\partial x_j}$ を示しなさい。(ii) $U(\rho,x_1,\cdots,x_n) = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}$ とする。$\lim_{\rho\to 0}\ln U$ を求めなさい。

[English] (1) Let $x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$, where $r > 0,\ 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \phi < 2\pi$. (i) Calculate $\det J$, where

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}.$$

(ii) Assume $z = 0$. For function $F(r(x,y),\phi(x,y))$, represent $\frac{\partial F}{\partial x}$ and $\frac{\partial F}{\partial y}$, using $r,\ \phi,\ \frac{\partial F}{\partial r}$, and $\frac{\partial F}{\partial \phi}$. (2) Let $y_j(\rho,x_1,\cdots,x_n) = \frac{x_j^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left[\sum_{k=1}^n x_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{1}{\rho}}}$ and $X(\rho,x_1,\cdots,x_n) = \left[\sum_{k=1}^n x_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}}$, where $x_j > 0$ for any $j = 1,\cdots,n$ and $\rho \in (0,1)$. (i) Show $y_j = \frac{\partial X}{\partial x_j}$. (ii) Calculate $\lim_{\rho\to 0}\ln U$, where $U(\rho,x_1,\cdots,x_n) = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}$.

問題 E–5　母平均 $\mu = 5$, 母分散 $\sigma^2 = 100$ の正規分布から大きさ $n = 10,000$, 値が $X_1, \cdots, X_n$ の標本を抽出する。(i) $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ の期待値 m, 分散 s^2 を計算しなさい。(ii) $P\left(|\bar{X} - \mu| > \bar{X}_0\right) = 0.05$ を満たす $\bar{X}_0$ を求めなさい。ただし、$\Omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ と $\Omega(1.96) = 0.025$ を解答に用いてよい。(iii) 仮説検定における第 1 種の過誤と第 2 種の過誤とは何か説明しなさい。(iv) 上記の標本を使って、σ^2 が既知であるとき、帰無仮説 $H_0 : \mu = 6$ と対立仮説 $H_1 : \mu \neq 6$ として μ について有意水準 5% で検定を行う。第 2 種の過誤が起きる確率を $\Omega(x)$ を用いて表しなさい。

[English]　Select a sample $X_1, \cdots, X_n$, where $n = 10,000$, from the normal distribution with population mean $\mu = 5$ and population variance $\sigma^2 = 100$. (i) Calculate the expected value m and the variance s^2 of $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$. (ii) Calculate $\bar{X}_0$ which satisfies $P(|\bar{X} - \mu| > \bar{X}_0) = 0.05$. You can use $\Omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ and $\Omega(1.96) = 0.025$ in the answer. (iii) Explain type I error and type II error in the statistical hypothesis testing. (iv) Using the above sample, regarding μ, we perform a test for the null hypothesis $H_0 : \mu = 6$ and the alternative hypothesis $H_1 : \mu \neq 6$ with the 5% significance level, when σ^2 is known. Represent probability of the type II error using $\Omega(x)$.