

令和3年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2021年8月25日)

専門試験科目群第7・社会科学群

以下の問題 E-1 から E-5 の中から 3 問選択して解答しなさい。

**Choose and answer three problems from the following E-1 to E-5.**

問題 E-1 消費者の効用関数が

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_2 + 1}$$

である。財 1 の価格を  $p(> 1)$ 、財 2 の価格を 1 とする。

(1) 収入が  $Y$  のときに、2 財の Marshallian 需要関数 (通常需要関数) を求め、間接効用関数  $V(p, Y)$  も求めなさい。

(2) 効用水準  $u \in (0, 2)$  を達成させるための Hicksian 需要関数 (補償需要関数) を求め、支出関数  $M(p, u)$  を求めなさい。

[English] Let the utility function of consumers be

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_2 + 1},$$

the price of good 1 be  $p(> 1)$  and the price of good 2 be 1.

(1) Given income of  $Y$ , derive the Marshallian demands (ordinary demands) for two goods and the indirect utility function  $V(p, Y)$ .

(2) Given utility level  $u \in (0, 2)$ , derive the Hicksian demand function (compensated demand function). Find the expenditure function  $M(p, u)$ .

**問題 E-2** 同質な技術と労働力を持つ二国を考える。国  $i \in \{1, 2\}$  の総生産は  $Y_i = L_i^\alpha K_i^{1-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  で表される。ただし、 $L_i$  と  $K_i$  はそれぞれ、 $i$  国における労働と資本の総投入量を表し、いずれも競争市場で取引される。

(1) 資本は二国間を自由に移動可能で、二国全体で総資本制約  $K_1 + K_2 = 2$  が成り立つ。他方で労働は移動不可能であり、それぞれの国に労働力  $L_1 = L_2 = 1$  が与えられている。また、各国政府は自国で投入されている資本のレントに対して  $t_i \times 100\%$  の税を徴収しているものとする。 $t_1 = 0.5, t_2 = 0$  が与えられたとき、市場均衡における各国の資本投入量を求めよ。

(2) 各国政府は自国の家計の賃金収入、資本レント収入、および税収の合計を最大化するように、税  $t_i$  を決定するものとする。いま、二国で投入される資本が全て国1の家計によって保有されているとき、どちらの国がより高い  $t_i$  を設定するかについての直観的な予測を述べよ。

**[English]** Consider two countries with the same technology and labor force. The gross production in country  $i \in \{1, 2\}$  is given as  $Y_i = L_i^\alpha K_i^{1-\alpha}$ , where  $\alpha \in (0, 1)$  holds and  $L_i$  and  $K_i$  represent the total input of labor and capital in country  $i$ , respectively, and they are both traded in competitive markets.

(1) Capital can move freely between the two countries, and the total capital constraint  $K_1 + K_2 = 2$  holds in the world. On the contrary, labor is internationally immobile, and each country is given labor force as  $L_1 = L_2 = 1$ . Also, the government of each country imposes  $t_i \times 100\%$  tax on the rent of the capital employed in the country. When  $t_1 = 0.5$  and  $t_2 = 0$  are given, show the capital input of each country in the market equilibrium.

(2) Consider that each government determines  $t_i$  to maximize the sum of the households' wage income, capital rent income, and tax revenue. If all the capital invested in the two countries is owned by the households of country 1, give an intuitive prediction about which country will set higher  $t_i$ .

令和3年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題(2021年8月25日)

専門試験科目群第7・社会科学群

**問題 E-3** (1) 応用一般均衡 (Computable general equilibrium: CGE) モデルにおいて、キャリブレーションが可能なパラメータと不可能なパラメータはそれぞれどのようなものか。GTAP や Eaton-Kortum などのよく知られた一般均衡モデルを例に挙げながら、具体的に説明しなさい。

(2) 「太陽表面の黒点の数が景気に影響する」という可能性を主張するサンスポット理論の経済学的根拠を、合理的期待に基づいて説明しなさい。

**[English]** (1) What kind of parameters can and cannot be calibrated in the Computable General Equilibrium (CGE) models? Explain by using a well-known general equilibrium model such as GTAP and Eaton-Kortum as example.

(2) Explain the economic mechanism of the sunspot theory, which argues that the number of sunspots on the sun's surface affects the economy, based on rational expectations.

問題 E-4 (1) 整数  $m$  と  $n$  に対して、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi \delta_{mn} \text{ と } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

を示しなさい。ただし、 $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \text{ のとき} \\ 0 & m \neq n \text{ のとき} \end{cases}$  はクロネッカーのデルタである。

(2)  $f(x)$  は  $2\pi$  を周期とする連続関数で、 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$  (ただし  $N$  は正の整数) と展開できるとする。このとき、係数  $a_k$  と  $b_k$  を  $f(x)$  を用いて表しなさい。

(3)  $f(x)$  が奇関数のときの係数の特徴を述べなさい。

[English] (1) For integers  $m$  and  $n$ , show

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi \delta_{mn} \text{ and } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0,$$

where  $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n \\ 0 & \text{if } m \neq n \end{cases}$  is the Kronecker's delta.

(2) Let  $f(x)$  be a continuous and periodic function with period  $2\pi$ , which can be expanded as  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$ , where  $N$  is a positive integer. Calculate coefficients  $a_k$  and  $b_k$  using  $f(x)$ .

(3) Describe the characteristics of the coefficients if  $f(x)$  is an odd function.

令和3年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題(2021年8月25日)

専門試験科目群第7・社会科学群

**問題 E-5** ある国における所得を  $X$  とおく。 $X$  がパレート分布に従う、すなわち累積分布関数を

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{x_{\min}}\right)^{-\alpha}, & x \geq x_{\min} \text{ のとき} \\ 0, & x < x_{\min} \text{ のとき} \end{cases}$$

とする。ただし、 $\alpha > 1$  とする。このとき、以下の問いに答えなさい。(1)  $X$  の確率密度関数を求めなさい。(2)  $E[X]$  および  $\text{Var}[X]$  を求めなさい。(3) この国では、上位 20% の所得者が全体の 80% の所得を得ているという。このときの  $\alpha$  の値を求めなさい。ただし、 $\ln 4 \approx 1.386$ ,  $\ln 5 \approx 1.609$  を用いてよい。

**[English]** Denote the national income by  $X$ . Assume that  $X$  follows the Pareto distribution, namely, its cumulative distribution function is given by

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{x_{\min}}\right)^{-\alpha}, & \text{if } x \geq x_{\min} \\ 0, & \text{if } x < x_{\min} \end{cases},$$

where  $\alpha > 1$ . Answer the following questions. (1) Calculate the probability density function of  $X$ . (2) Calculate  $E[X]$  and  $\text{Var}[X]$ . (3) Calculate  $\alpha$  if the top 20% earners get 80% of the total income in this country. The approximations  $\ln 4 \approx 1.386$  and  $\ln 5 \approx 1.609$  can be used for the calculation.