

令和2年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2021年1月30日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-1 逆需要関数 $p(x)$ が与えられた下で、需要の価格弾力性 ϵ と凸性 ρ を次のように定義する。

$$\epsilon = -\frac{p(x)}{xp'(x)}, \quad \rho = -\frac{xp''(x)}{p'(x)}.$$

(i) 独占企業の限界生産コストを定数 c (≥ 0) とする。企業の利潤最大化行動の下で、 $\epsilon \geq 1$, $\rho \leq 2$ が成り立つことを示しなさい。

(ii) 需要関数 $x(p) = \gamma p^{-\mu} + \delta p^{-\sigma}$ に対して、 ϵ を計算しなさい。ただし、 $\mu > 0$, $\sigma > 0$ とする。

[English] Given inverse demand function $p(x)$, the price elasticity of demand ϵ and its convexity ρ are defined by

$$\epsilon = -\frac{p(x)}{xp'(x)}, \quad \rho = -\frac{xp''(x)}{p'(x)},$$

respectively. (i) Assume that the marginal cost of a monopolistic producer is a constant $c \geq 0$.

Show $\epsilon \geq 1$ and $\rho \leq 2$ under the profit maximization behavior of the firm. (ii) Calculate ϵ for demand function $x(p) = \gamma p^{-\mu} + \delta p^{-\sigma}$, where $\mu > 0$, $\sigma > 0$.

令和2年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題(2021年1月30日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-2 2国 A, B が存在し、それぞれの国は労働を投入して2種類の財 X, Y を生産することができる。国 r で財 i を1単位を生産するのに必要な労働投入量を L_i^r で表すとき、 $L_X^A = 1$, $L_X^B = 3$, $L_Y^A = 2$, $L_Y^B = 5$ とする。また各国には、それぞれ同質な10単位の家計が居住している。各家計は1単位の労働力を与えられており、効用関数は $U = XY$ で表される。

- (1) 2国がそれぞれどのような比較優位を持っているかについて説明しなさい。
- (2) 2国間の貿易費用が存在しないとき、貿易均衡における各国の財輸出量を求めなさい。
- (3) 貿易を禁止する政策について、パレート効率性の観点から評価しなさい。

[English] There are two countries A and B, each of which can produce two kinds of goods, X and Y, by inputting labor. We assume $L_X^A = 1$, $L_X^B = 3$, $L_Y^A = 2$, and $L_Y^B = 5$, where L_i^r is the labor input required to produce one unit of good i in country r . In addition, each country has 10 units of homogeneous households. Each household has one unit of labor, and the utility function is given by $U = XY$.

- (1) Explain what kind of comparative advantage each country has.
- (2) When there is no trade cost between the two countries, show the amount of goods exported by each country in the trade equilibrium.
- (3) Evaluate the policy of prohibiting trade from the viewpoint of Pareto efficiency.

令和2年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2021年1月30日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-3 以下のような労働者の職探しについて考える。労働者は、各期 t に失業 ($s(t) = U$) または雇用 ($s(t) = J$) のいずれかの状態を取り、 t 期において状態 U, J であった労働者は、 $t+1$ 期にそれぞれ確率 $g_t, \gamma \in [0, 1]$ で、異なる状態に遷移する。いま、状態 U, J における労働者の t 期における純所得を、それぞれ $w_U = -cg_t^2/2 < 0, w_J = w > 0$ (ただし、 $c > 0$) のように表す。このとき労働者は、純所得の期待割引現在価値 $E\left[\sum_{k=t}^{\infty} \rho^{k-t} w_{s(k)}\right], \rho \in (0, 1)$ を最大化するように、每期 g_t を選ぶ。

(1) 失業状態の労働者が選択する最適な $g_t = g^*$ を求めなさい。ただし、解は $g^* \in (0, 1)$ を満たすと仮定する。

(2) 固定された数の同質な労働者からなる市場を考えると、定常状態における市場全体の失業率 n_U^* を求めなさい。

[English] Consider the following job search of workers. Workers are either unemployed ($s(t) = U$) or employed ($s(t) = J$) in each period t . A worker in state U (resp. J) in period t changes to the other state in the next period with probability g_t (resp. $\gamma \in [0, 1]$). The net income of a worker in state U (resp. J) is denoted by $w_U = -cg_t^2/2 < 0$ (resp. $w_J = w > 0$), where $c > 0$. At this time, U workers choose g_t to maximize $E\left[\sum_{k=t}^{\infty} \rho^{k-t} w_{s(k)}\right], \rho \in (0, 1)$, which is called the present value of expected net income.

(1) Give the optimal $g_t = g^*$ for unemployed workers. You can assume that the solution satisfies $g^* \in (0, 1)$.

(2) Consider a fixed number of homogeneous workers in the market. Find the steady state unemployment rate n_U^* in the market.

令和2年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題(2021年1月30日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-4

(1) 実関数 $w(x)$ を $x = we^w$ のように定義する。ただし、 $x > -1/e$, $w > -1$ とする。(i) $w'(x)$ を計算しなさい。(ii) $w(x)$ の単調性を示しなさい。(iii) $\int_0^e w(x)dx$ を計算しなさい。

(2) 下記の偏微分を計算しなさい。ただし、 $t > 0$ 。

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} \sin t + \ln t & e^x - 3xt & te^t + \ln 3t \\ 5x^2 - 8 \cos t & e^{2t} + 6 \ln t & 8t - e^{6-t^2} \\ 3 \cos(t^2) & t + \cos(t - t^3) & \sin(6x + t) \end{vmatrix}.$$

[English] (1) Real-valued function $w(x)$ is defined by $x = we^w$, where $x > -1/3$ and $w > -1$. (i) Calculate $w'(x)$. (ii) Show that $w(x)$ is monotonic. (iii) Calculate $\int_0^e w(x)dx$.

(2) For $t > 0$, calculate the following partial derivative:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} \sin t + \ln t & e^x - 3xt & te^t + \ln 3t \\ 5x^2 - 8 \cos t & e^{2t} + 6 \ln t & 8t - e^{6-t^2} \\ 3 \cos(t^2) & t + \cos(t - t^3) & \sin(6x + t) \end{vmatrix}.$$

令和2年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題(2021年1月30日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E-5 (1) 独立同分布な確率変数 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を考える。平均 $E[X_i] = \mu$ と分散 $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ は有限とし、 $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とおく。(i) $E[T_n]$ と $\text{Var}[T_n]$ を、 μ, σ を用いて表しなさい。(ii) $P(E)$ を、事象 E が起こる確率とする。任意の $k > 0$ に対して、不等式 $P(|X_i - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ を証明しなさい。(iii) 前問の結果を用い、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \mu| < \varepsilon) = 1$ を示しなさい。

(2) 密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

に従う母集団から選ばれた大きさ n の標本 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。(i) 母平均 μ と母分散 σ^2 に対する尤度関数を求めなさい。(ii) 母分散が既知であるとき、母平均に対する最尤推定量を求めなさい。(iii) 母平均が既知であるとき、母分散に対する最尤推定量を求めなさい。

[English] (1) Consider independently and identically distributed random variables X_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Assume that the mean $E[X_i] = \mu$ and the variance $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ are finite, and let $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. (i) Represent $E[T_n]$ and $\text{Var}[T_n]$ using μ and σ . (ii) Let $P(E)$ be the probability that an event E occurs. Prove the inequality $P(|X_i - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ for an arbitrary $k > 0$. (iii) Using the results in the previous questions, show $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \mu| < \varepsilon) = 1$ for an arbitrary $\varepsilon > 0$.

(2) Consider a sample of size n , X_1, X_2, \dots, X_n , selected from a population having density function

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

(i) Derive the likelihood function for the population mean μ and the population variance σ^2 .
(ii) Given the population variance, calculate the maximum likelihood estimator for the population mean.
(iii) Given the population mean, calculate the maximum likelihood estimator for the population variance.

令和2年度実施

東北大学大学院情報科学研究科 博士課程前期・入学試験問題（2021年1月30日）
専門試験科目群第7・社会科学群

以下の五問から三問を選択して回答しなさい。

（それ以上に回答した場合は減点することがある。ただし、下書きは関係ない。）

問題 S-1 問題が「社会的につくられる」とは、どのような事態を指しうるか、何らかの学説の見地から、具体例をあげて説明しなさい

問題 S-2 Goffman, E.による相互行為論において、「フロント」「印象操作」とは、どのようなことか、説明しなさい。

問題 S-3 今日における地域社会の何らかの問題をとりあげ、政策的課題と住民参加の課題の関連について、説明しなさい。

問題 S-4 Putnam, R.『孤独なボウリング』は、「人と人とのつながり」をどのように考察しているか。説明しなさい。

問題 S-5 社会学的インタビューにおける対面状況とオンライン状況を比較し、オンラインインタビューのメリットとデメリットについて説明しなさい。