令和 2 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2020 年 8 月 26 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E-1　(1) ある消費者の効用関数を $U = x^{0.5} + y$ のようにおく。財 x の価格が 3 から 1 に低下したときの補償変分を求めなさい。ただし、この消費者の所得と財 y の価格はそれぞれ 10, 1 に固定されているとする。

(2) いま、$D'(p) < 0$ かつ $D''(p) \leq 0$ を満たすような市場需要関数 $D(p)$ に直面している独占企業に対し、販売価格の $t(> 0)$ %を税として徴収する政策が実施されたとする。この政策の効果について説明しなさい。

[English] (1) Assume the utility function of a consumer as $U = x^{0.5} + y$. Show the Compensating Variation when the price of good x changes from 3 to 1, given the consumer income and the price of y as 10 and 1, respectively.

(2) Suppose that a policy is implemented to collect $t(> 0)$ % tax from the market price of a monopolistic company facing a market demand function $D(p)$ which satisfies $D'(p) < 0$ and $D''(p) \leq 0$. Explain the effect of the policy.

令和 2 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2020 年 8 月 26 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–2　1 単位の人口が都市 1 または 2 を選んで居住する。都市間の移住にコストがないと仮定する。都市 $i = 1, 2$ の効用関数は $u_i = 1 - a_i x_i$ で表す。ただし、x_i は居住人数で、$a_i \in (0, 1)$ は都市 i の居住環境を表すパラメータである。

(1) 均衡状態における両都市の人口と住民の均衡効用を求めなさい。

(2) 都市 1 のみにおいて、住民に所得税 t を課し、都市環境を改善する。このとき住民の新たな効用関数は $v_1 = 1 - t - a_1 x_1/(1 + ct)$ である。ただし、$c > 1/a_1 + 1/a_2$ と仮定する。$t \in [0, a_2)$ が与えられたとき、新しい均衡状態に両都市の人口と住民の均衡効用を求めなさい。

(3) 政府は均衡効用を最大化するように、都市 1 の税率 t を設定する。その最適税率を計算しなさい。

[English]

1 unit of population chooses either city 1 or city 2 to reside. Residents are freely mobile across cities. The utility function in city i is $u_i = 1 - a_i x_i$, $i = 1, 2$, where x_i is the population in city i, $a_i \in (0, 1)$ is a parameter representing the amenity of city i.

(1) Find the equilibrium populations in two cities and the equilibrium utility level.

(2) Only the government of city 1 imposes income tax t to improve the city amenity. The new utility function in city 1 is $v_1 = 1 - t - a_1 x_1/(1 + ct)$, where $c > 1/a_1 + 1/a_2$ is assumed. Given $t \in [0, a_2)$, find the new equilibrium populations in two cities and the new equilibrium utility level.

(3) Find the optimal tax rate t for the government of city 1 to maximize the equilibrium utility.

令和 2 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2020 年 8 月 26 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–3　2 期間生き、各期で消費を行う個人の期待効用最大化問題を以下のように与える。

$$\max_{C_1, C_2} U = E\Big[\sum_{t=1,2} \delta^{t-1} C_t^{\rho}\Big], \quad \rho \in (0,1),\, \delta \in (0,1),$$
$$\text{s.t. } C_2 = (1+r)(W - C_1)$$

ただし、初期時点の資産 $W > 0$ は所与である。ここで、利子率 $r > -1$ は、区間 $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$ の一様分布に従う確率変数であり、$\epsilon \in (0,2)$ とする．個人は C_1 を決定する時点でその確率分布関数のみを知っている。いま、ϵ だけが増加したとき、C_1 が増加するか減少するかを示しなさい。

[English]　Consider the following problem of maximizing the expected utility of an individual who lives for two periods and consumes in each period.

$$\max_{C_1, C_2} U = E\Big[\sum_{t=1,2} \delta^{t-1} C_t^{\rho}\Big], \quad \rho \in (0,1),\, \delta \in (0,1),$$
$$\text{s.t. } C_2 = (1+r)(W - C_1)$$

where the initial wealth $W > 0$ is given. Also, interest rate $r > -1$ is a stochastic variable following an uniform distribution whose interval is $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$, $\epsilon \in (0,2)$. The individual only knows the distribution function when she/he determines C_1. Show whether C_1 increases or decreases when ϵ increases.

令和 2 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2020 年 8 月 26 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–4 (1) x は方程式 $f(x,t) \equiv x + e^x + \sin t - e^{x+t} = 0$ によって t の関数として定義されている。 $x(0)$ と $x'(0)$ を計算しなさい。

(2) x と y は方程式 $f(x,y,t) \equiv x+e^{x-y}+\sin t-e^{x+y+t} = 0$, $g(x,y,t) \equiv e^{x+y}-\sin t-e^{x-y+t} = 0$ によって t の関数として定義されている。 $x(0)$, $y(0)$, $x'(0)$, $y'(0)$ を計算しなさい。

[English] (1) x is a function of t defined by equation$f(x,t) \equiv x + e^x + \sin t - e^{x+t} = 0$. Calculate $x(0)$ and $x'(0)$.

(2) x and y are functions of t defined by equations $f(x,y,t) \equiv x + e^{x-y} + \sin t - e^{x+y+t} = 0$, $g(x,y,t) \equiv e^{x+y} - \sin t - e^{x-y+t} = 0$. Calculate $x(0)$, $y(0)$, $x'(0)$, and $y'(0)$.

問題 E–5　(1) (i) 連続型確率変数 X と Y の和の期待値 $\mathrm{E}[X+Y]$ を $\mathrm{E}[X]$ と $\mathrm{E}[Y]$ を用いて表しなさい。 (ii) $X+Y$ の分散が $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + \mathrm{Cov}[X,Y]$ となることを示しなさい。ここで、$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]$ は X と Y の共分散である。 (iii) X と Y が独立なとき、$\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ を示しなさい。
(2) 確率過程 $\{u_t\}$ $(t = 1, 2, \cdots, T)$ が $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| < 1$, $u_0 = \mu$ に従っているとする。ここで、$\mathrm{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\mathrm{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$, $\mathrm{E}[\varepsilon_s \varepsilon_t] = 0$ $(s \neq t)$ を満たすとする。(i) u_2 を $\mu, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ を用いて表しなさい。 (ii) u_t を $\mu, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ を用いて表しなさい。(iii) $\mathrm{E}[u_t]$、$\mathrm{Var}[u_t]$ を計算しなさい。(iv) 時系列 $\{u_t\}$ が与えられたとき、残差二乗和 $\displaystyle\sum_{s=1}^{T}(u_s - \hat{\rho} u_{s-1})^2$ を最小化する ρ の推定値 $\hat{\rho}$ を求めなさい。

[English]　(1) Represent the expected value of the sum of continuous random variables X and Y, $\mathrm{E}[X+Y]$, using $\mathrm{E}[X]$ and $\mathrm{E}[Y]$. (ii) Show that the variance of $X+Y$ is $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + \mathrm{Cov}[X,Y]$, where $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])]$ is the covariance between X and Y. (iii) Show that $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ holds if X and Y are independent.
(2) Let $\{u_t\}$ $(t = 1, 2, \cdots, T)$ be a random process following $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| < 1$, $u_0 = \mu$. Here, we assume that $\mathrm{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\mathrm{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$, $\mathrm{E}[\varepsilon_s \varepsilon_t] = 0$ $(s \neq t)$ hold. (i) Represent u_2 using $\mu, \varepsilon_1, \varepsilon_2$. (ii) Represent u_t using $\mu, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$. (iii) Calculate $\mathrm{E}[u_t]$ and $\mathrm{Var}[u_t]$. (iv) For a given $\{u_t\}$, calculate the estimator of ρ, $\hat{\rho}$, which minimizes the squared sum of residuals $\displaystyle\sum_{s=1}^{T}(u_s - \hat{\rho} u_{s-1})^2$.