令和元年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2020 年 2 月 1 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E-1 2 種類の財 x, y からなる効用関数 $U(x,y) = x^\alpha + y^\alpha$ を考える。ただし、$x \in \{0,1\}$ は 0 または 1 のいずれかの値のみをとる変数であり、他方 $y \geq 0$ は連続な値をとる。また $\alpha \in (0,1)$ はパラメータである。以下の問いに答えなさい。

（1）経済全体に 2 種類の家計（タイプ H，L）が存在し、それぞれの人口を n_H, n_L とする。2 種類の家計は同一の効用関数 $U(x,y)$ と異なる所得水準 $y_H > y_L > 1$ を持つ。この経済全体における x の需要関数 $D(p)$ を求め、需要曲線の図を描きなさい。ただし、x の価格は p で表し、y の価格は 1 に固定する。

（2）財 x は独占企業によって単位費用 1 で供給されているとする。$\alpha = 0.5, y_H = 4, y_L = 2, n_H = n_L = 1$ が与えられたとき、独占企業が設定する価格を求めなさい。

[English] Consider a utility function $U(x,y) = x^\alpha + y^\alpha$ of two consumption goods x and y, where $x \in \{0,1\}$ can only take either 1 or 0 while $y \geq 0$ can take a continuous value. $\alpha \in (0,1)$ is a parameter. Answer the following questions.

(1) There are two types of households (called types H and L) whose population is n_H and n_L. Those households have the same utility function $U(x,y)$ but different income levels $y_H > y_L > 1$. Derive demand function $D(p)$ for x in the entire market, and draw a figure showing the demand curve, where p is the price of x, and the price of y is fixed to 1.

(2) Now good x is provided by a monopolistic firm in unit cost 1. Derive the profit-maximizing price of the monopolistic firm when $\alpha = 0.5, y_H = 4, y_L = 2, n_H = n_L = 1$.

令和元年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2020 年 2 月 1 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–2　企業 $i = 1, 2$ が同質財を供給し、利潤最大化を目的として価格と立地点を選択する問題を考える。l 人の消費者は区間 $[0, l]$ 上に一様に分布しており、2 社のうち 1 社から “財 1 単位だけを必ず購入する” とする。距離 d の輸送に必要な輸送費 d^2 は消費者が負担する。各企業の生産費用をゼロとすると、企業 i の価格 p_i と需要 q_i より得られる利潤は $p_i q_i$ となる。

(1) 各企業の立地点 x_1, x_2(ただし、$0 \le x_1 \le x_2 \le l$) が与えられたときの、各企業の均衡価格 p_1^* と p_2^* を求めなさい。

(2) 各企業が立地を先に選択する 2 段階競争の下で、均衡立地 x_1^*, x_2^* を求めなさい。

[English]

Two firms providing a homogeneous good maximize their profits by choosing their optimal locations and prices. l consumers are evenly dispersed along $[0, l]$. Each consumer chooses only one unit of the good from either firm 1 or firm 2. Transport cost d^2 for distance d is paid by consumers. Assume that the production costs are zero so that the profit of firm i is $p_i q_i$ if its price is p_i and its demand is q_i.

(1) Given locations x_1 and x_2 (where $0 \le x_1 \le x_2 \le l$), find the equilibrium prices p_1^* and p_2^*.

(2) Assume that firms have a two-stage competition in which they choose locations first. Find the equilibrium locations x_1^* and x_2^*.

令和元年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2020 年 2 月 1 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–3 (1) 地域間所得格差の収束に関する β convergence と σ convergence について、両者の違いが分かるように説明しなさい。

(2)「トービンの q」の定義について示し、それが株式市場の分析にどのように役立つかを説明しなさい。

[English] (1) Explain β convergence and σ convergence in inter-regional income inequality. Point out their differences clearly.

(2) Give the definition of “Tobin’s q”, and explain how it is useful in the analysis of stock markets.

令和元年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2020 年 2 月 1 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–4　(1) $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ (ただし、$s > 0$) に関して、以下の問いに答えなさい。(i) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示しなさい。(ii) $\Gamma(1) = 1$ および $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を示しなさい。(iii) 自然数 n に対して、$\Gamma(n+1) = n!$ および $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ を示しなさい。ここで、

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2 & n\text{ が偶数} \\ n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1 & n\text{ が奇数.} \end{cases}$$

(2) n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ のトレース $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ に関して、以下の問いに答えなさい。(i) n 次正方行列 $X,\ Y,\ Z$ に対して、$\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ および $\mathrm{tr}(XYZ) = \mathrm{tr}(ZXY) = \mathrm{tr}(YZX)$ を示しなさい。(ii) $\mathrm{tr}(C^TB^TABC)$ を計算しなさい。ただし、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

[English]　(1) Answer the following questions regarding $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$, where $s > 0$. (i) Show $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. (ii) Show $\Gamma(1) = 1$ and $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. (iii) Show $\Gamma(n+1) = n!$ and $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ for natural number n, where

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2 & \text{if } n \text{ is even} \\ n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

(2) Answer the following questions related to trace $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, where $A = (a_{ij})$ is a square matrix of order n. (i) Show $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ and $\mathrm{tr}(XYZ) = \mathrm{tr}(ZXY) = \mathrm{tr}(YZX)$ for square matrices of order n, $X,\ Y,\ Z$. (ii) Calculate $\mathrm{tr}(C^TB^TABC)$ with

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

令和元年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2020 年 2 月 1 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–5　(1) 線形回帰モデル $Y = a + bX + \varepsilon$ を考える。X_i と Y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を独立変数 X と従属変数 Y の標本値、$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ を標本平均、$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ および $S_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$ をそれぞれ X の標本分散および X と Y の標本共分散とする。ε は標本ごとに無相関な擾乱項であり、平均 $\mathrm{E}[\varepsilon] = 0$ および分散 $\mathrm{Var}[\varepsilon] = \sigma^2$ をもつ。また $\mathrm{E}[X\varepsilon] = 0$ である。(i) a と b に対する最小自乗推定量は、それぞれ $\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} = \bar{Y} - \frac{S_{XY}}{S_X^2}\bar{X},\ \hat{b} = \frac{S_{XY}}{S_X^2}$ となることを示しなさい。(ii) $\hat{b}$ が b の不偏推定量であること、すなわち $\mathrm{E}[\hat{b}] = b$ を示しなさい。

(2) あるコインを投げたときに表が出る確率を p とする。(i) このコインを N 回投げた時に n 回表が出る確率を求めなさい。(ii) $p = 1/2,\ N = 10,\ n = 8$ の時にこの確率を計算し、小数点以下第 3 位まで求めなさい。(iii) あるコインを 10 回投げた時に、8 回表が出たという。このとき、このコインは公平かどうか議論しなさい。

[English]　(1) Consider a linear regression model $Y = a + bX + \varepsilon$, where X_i and Y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ are respectively the sample values of independent variable X and dependent variable Y, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ and $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ are their sample means, $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ and $S_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$ are respectively the sample variance of X and the sample covariance between X and Y, ε is the disturbance which is uncorrelated between samples with mean $\mathrm{E}[\varepsilon] = 0$ and variance $\mathrm{Var}[\varepsilon] = \sigma^2$. Also, $\mathrm{E}[X\varepsilon] = 0$ holds. (i) Show that the ordinary least squares estimators of a and b are $\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} = \bar{Y} - \frac{S_{XY}}{S_X^2}\bar{X}$ and $\hat{b} = \frac{S_{XY}}{S_X^2}$, respectively. (ii) Show that $\hat{b}$ is the unbiased estimator of b, i.e. $\mathrm{E}[\hat{b}] = b$ holds.

(2) Let p be the probability to get the head when one flips a coin. (i) Calculate the probability to get the head n times when one flips this coin N times. (ii) Calculate this probability for $p = 1/2,\ N = 10,\ n = 8$ and round off to third decimal places. (iii) Discuss the fairness of this coin if someone gets the head 8 times when flipping the coin 10 times.