

# 7 群

令和 7 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2025 年 8 月 27 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

## 問題 E-1

- (1) 効用関数  $\prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i}$  を持ち、 $N \geq 2$  種類の財を消費する消費者の需要  $x_i$  を求めなさい。所得と各財の価格はそれぞれ  $I, p_i$  とする。
- (2) 上の (1) で用いた効用関数のもとで、 $i = 1$  財の価格が  $p_1^0$  から  $p_1^1$  に上昇する政策を政府が実施したとき、政府が消費者に対して元の効用を保証するように事後的に支払うべき所得補償額を求めなさい。他の財の価格は不変とする。
- (3) レオンチェフ型効用関数  $u(x, y) = \min\{x, y\}$  とコブ・ダグラス型効用関数  $u(x, y) = x^b y^{1-b}$  が、CES 型効用関数  $u(x, y) = (ax^\rho + (1-a)y^\rho)^{1/\rho}$ ,  $\rho \leq 1$  の特殊ケースとして再現できることをそれぞれ示しなさい。
- (4) 競争市場における消費者に対して、政府が財の数量 1 単位あたり  $t$  の消費税を課した時、生産者価格と消費者価格はどのように変化するか。またどちらの変化量がより大きいか。図を用いて議論しなさい。

[English] (1) Show the demand for  $x_i$  of a consumer, who consumes the  $N \geq 2$  kinds of goods and has an utility function  $\sum_{i=1}^N \alpha_i \log x_i$ . The income and the price of each good are given by  $I$  and  $p_i$ , respectively.

(2) Under the utility function used in (1) above, when the government implements a policy in which the price of  $i = 1$  good rises from  $p_1^0$  to  $p_1^1$ , show the amount of income compensation that the government pays to the consumer to guarantee the original utility after the change. The prices of other goods are assumed unchanged.

(3) Show that the Leontief utility function  $u(x, y) = \min\{x, y\}$  and the Cobb-Douglas utility function  $u(x, y) = x^b y^{1-b}$  can be reproduced as special cases of the CES utility function  $u(x, y) = (ax^\rho + (1-a)y^\rho)^{1/\rho}$ ,  $\rho < 1$ .

(4) When the government imposes a consumption tax of  $t$  per unit of quantity on consumers in a competitive market, how do producer price and consumer price change? Also, which change is more significant? Discuss by using diagrams.

**問題 E-2**

ある中心業務地区に、毎日6000人がそれぞれ車で通勤する。業務地区の手前には1分あたり最大100台が通過できる橋があり、到着人数が容量を超えた場合には橋の前に待ち行列が発生する。待ち行列に並んだ場合の時間費用を100円/分とする。また、全ての通勤者にとって9:00に橋を通過することが最も望ましく、9:00以前および9:00以降に橋を通過した場合の追加的時間費用を、それぞれ50円/分及び100円/分とする。各通勤者は他の通勤者の橋への到着時刻を既知として、自分の通勤費用を最小化するように到着時刻を選択する。

(1) 最初と最後の車がそれぞれ8:30と9:30に橋を通過している状態が、均衡とまらない理由を述べなさい。(2) 均衡で最初の車が橋を通過する時刻を求めなさい。(3) 均衡で8:30と9:10に待ち行列に並んでいる人数をそれぞれ求めなさい。人数は連続変数として考えること。(4) 政府が、全通勤者の合計時間費用の最小化を目的として、橋を通過する時刻ごとに異なる橋の通行料金を徴収する。8:50に橋を通過する人が支払う料金を求めなさい。

**[English]**

6,000 people commute by car to a central business district everyday. There is a bridge just before the business district that can accommodate a maximum of 100 vehicles per minute, and a queue forms in front of the bridge if the number of arriving vehicles exceeds the capacity. The time cost of waiting in the queue is assumed to be 100 yen/minute. It is also assumed that crossing the bridge at 9:00 is the most preferable for all the commuters, and the additional time costs of crossing the bridge before and after 9:00 are 50 yen/minute and 100 yen/minute, respectively. All commuters choose the arrival time at the bridge to minimize their own time cost with knowing the others' choices.

(1) Suppose that the first and the last vehicles cross the bridge at 8:30 and 9:30, respectively. Show the reason why it is not an equilibrium. (2) Find the time when the first vehicle crosses the bridge in equilibrium. (3) Find the number of people waiting in the queue at 8:30 and 9:10 in equilibrium, respectively. Note that the number of people is a continuous variable. (4) Suppose that the government charges people different bridge tolls depending on the time of crossing the bridge to minimize the total time cost of all commuters. Find the toll paid by people crossing the bridge at 8:50.

## 問題 E-3

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$  を考える。(1)  $A$  の固有値と対応する固有ベクトルを全て求めなさい。(2)

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  とし、 $\mathbf{u}^T$  は  $\mathbf{u}$  の転置ベクトルとする。 $x$  の関数

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \left[ \frac{1}{10} (\mathbf{u}^T A \mathbf{u}) t - x \sin t \right] dt$$

を考える。三角関数の加法定理を用いて、 $x = 0$  における  $f(x)$  の2次のテイラー多項式を計算しなさい。(3)  $A$  の1列目、2列目の列ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  とおく。 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1$ 、また、 $\mathbf{q}_j = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{v}_j)}} \mathbf{v}_j$  とするとき ( $j = 1, 2$ )、内積  $(\mathbf{q}_j^T \cdot \mathbf{q}_k)$  を求めなさい ( $k = 1, 2$ )。 (4)  $\mathbf{q}_1$  と  $\mathbf{q}_2$  を列ベクトルとする  $2 \times 2$  行列  $Q = (\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2)$  を考える。等式  $A = QR$  を満たす行列  $R$  を求めなさい。

## [English]

Consider a matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ . (1) Find all eigenvalues and corresponding eigenvectors

of  $A$ . (2) Let  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , and  $\mathbf{u}^T$  be the transpose of  $\mathbf{u}$ , respectively. Consider a function of  $x$ ,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \left[ \frac{1}{10} (\mathbf{u}^T A \mathbf{u}) t - x \sin t \right] dt.$$

Find the second-order Taylor polynomial of  $f(x)$  in  $x = 0$  using the angle addition theorem.

(3) Let the first and second column vectors of  $A$  be  $\mathbf{a}_1$  and  $\mathbf{a}_2$ . Let  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1$ , and  $\mathbf{q}_j = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{v}_j)}} \mathbf{v}_j$ , where  $j = 1, 2$ . Calculate the inner product  $(\mathbf{q}_j^T \cdot \mathbf{q}_k)$ ,

where  $k = 1, 2$ . (4) Let  $Q = (\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2)$  be a  $2 \times 2$  matrix with  $\mathbf{q}_1$  and  $\mathbf{q}_2$  its column vectors. Find matrix  $R$ , which satisfies the equality  $A = QR$ .

## 問題 E-4

確率密度関数が

$$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(Y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

で与えられる確率変数  $Y$  を考える。(1)  $X = e^Y$  の確率密度関数を求めなさい。(2)  $X$  の  $n$  次モーメントが  $E[X^n] = E[e^{nY}] = \exp\left(n\mu + \frac{1}{2}n^2\sigma^2\right)$  となることを示しなさい。(3)  $X$  の観測値  $\{x_1, \dots, x_k\}$  に対する、 $\mu$  および  $\sigma$  の最尤推定量を計算しなさい。(4)  $t$  期における、都市  $i$  の人口を  $S_i(t)$ 、各期の人口成長率を  $r_i(t) = \frac{S_i(t)}{S_i(t-1)}$  とする。 $r_i(t)$  は人口に依存せず、すべての期および都市において独立かつ同一の確率分布に従うと仮定する。(i)  $S_i(t)$  を、 $S_i(0)$  および  $\{r_i(s)\}$  ( $s = 1, 2, \dots, t-1$ ) を用いて表しなさい。(ii) 十分時間が経ったとき、都市人口はどのような分布に従うか議論しなさい。

## [English]

Consider a random variable  $Y$ , whose probability density function is given by

$$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(Y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

(1) Find the probability density function of  $X = e^Y$ . (2) Show that the  $n$ -th moment of  $X$  is given by  $E[X^n] = E[e^{nY}] = \exp\left(n\mu + \frac{1}{2}n^2\sigma^2\right)$ . (3) Find the maximum likelihood estimators of  $\mu$  and  $\sigma$  based on the observations  $\{x_1, \dots, x_k\}$  of  $X$ . (4) Let the population of the city  $i$  and its growth rate at period  $t$  be  $S_i(t)$  and  $r_i(t) = \frac{S_i(t)}{S_i(t-1)}$ , respectively. Assume that  $r_i(t)$  does not depend on the population and follows the independent and identical probability distribution in all periods and cities. (i) Express  $S_i(t)$  in terms of  $S_i(0)$  and  $\{r_i(s)\}$  ( $s = 1, 2, \dots, t-1$ ). (ii) Discuss the distribution of the city population after a sufficient amount of time.

令和7年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2025年8月27日)

専門試験科目群第7・社会科学群

略解

問題 E-1

【作題意図】：効用理論と市場均衡に関する基本的理解

(1)  $x_i = \frac{\alpha_i I}{p_i \sum_k \alpha_k}$  (2) 補償額は  $I[(p'_1/p_1)^{\frac{\alpha_1}{\sum_i \alpha_i}} - 1]$  (3)  $\rho = 0$  でコブダグラス、 $\rho \rightarrow -\infty$  でレオンチェフ型となる。(4) 生産者価格は低下し、消費者価格は上昇する。両者の相対的な大きさは、供給曲線と需要曲線の勾配の相対的な大きさによって決まる。供給曲線が相対的に緩やかな場合は、生産者価格の上昇は小さく、消費者価格の変化が大きい。(図は省略)

問題 E-2

【作題意図】：ナッシュ均衡概念に関する基本的理解と交通問題への応用力の確認

(1) 8:20 (2) 8:30、9:10 における待ち行列の長さはそれぞれ 1000 人と 500 人 (3) 1500 円 (4) 3000 円

問題 E-3

【作題意図】：テイラー展開、初等関数の積分、逆行列や固有値問題など、微分積分と線形代数の基礎知識の確認

(1) 固有値 5 に対応する固有ベクトルは  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 、固有値 2 に対応する固有ベクトルは、 $c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、

ただし  $c_1, c_2$  は任意定数。(2)  $\frac{\pi}{2}$  (3)  $j = k$  のとき 1、 $j \neq k$  のとき 0 (4)  $R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$

問題 E-4

【作題意図】：正規分布の諸性質と、統計推論に関する基礎知識の確認

(1)  $g(X) = \frac{1}{X\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\ln X - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$  (2)  $E[X^n] = \exp\left(\mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2\right)$  (3)  $\hat{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln x_i$ ,

$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\ln x_i - \hat{\mu})^2}$  (4) (i)  $S_i(t) = S_i(0) \prod_{s=1}^t r_i(s)$ . (ii) 十分時間が経過した後、 $S_i(t)$  は対数正規分布に従う。